

OBTENCIÓN DE FACTORES DE LA FORMA $(x^m - b)$, DE UN POLINOMIO DE GRADO $n \geq m$

Ricardo Alberto Idárraga Idárraga.
Universidad de Caldas

TEOREMA

**Método para hallar factores de la forma $(x^m - b)$, con $m \in \mathbb{N}$,
 $2 \leq m \leq n$, y $b \in \mathbb{C}$, de un polinomio de grado n , con $n \in \mathbb{N}$ y
coeficientes complejos**

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, con $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ complejos, $a_0 \neq 0$, y, $a_n \neq 0$; si $(x^m - b)$ es un factor de $P(x)$, y si $n = km + i$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leq i < m$, entonces b lo podemos hallar como un cero de cada uno de las siguientes ecuaciones polinómicas en b :

$$P(b) = \sum_{p=0}^k a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, i; \quad y,$$

$$P(b) = \sum_{p=0}^{k-1} a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = i+1, i+2, \cdots, m-1$$

Prueba

El residuo de dividir $p(x)$ entre $(x^m - b)$ es:

$$R(x) = \sum_{j=0}^i \left[\left(\sum_{p=0}^k a_{pm+j} \cdot b^p \right) x^j \right] + \sum_{j=i+1}^{m-1} \left[\left(\sum_{p=0}^{k-1} a_{pm+j} \cdot b^p \right) x^j \right]$$

nótese que es de grado $m - 1$, y el cociente es:

$$\begin{aligned}
C(x) = & \sum_{j=0}^{m-1} a_{mk+i-j} x^{(k-1)m+i-j} + \\
& \sum_{j=0}^{m-1} (a_{(k-1)m+i-j} + a_{km+i-j} b) x^{(k-2)m+i-j} + \\
& \sum_{j=0}^{m-1} (a_{(k-2)m+i-j} + a_{(k-1)m+i-j} b + a_{km+i-j} b^2) \cdot x^{(k-3)m+i-j} \\
& + \cdots + \sum_{j=0}^{m-1} (a_{2m+i-j} + a_{3m+i-j} b + \cdots + a_{km+i-j} b^{k-2}) x^{m+i-j} \\
& + \sum_{j=0}^{m-1} (a_{m+i-j} + a_{2m+i-j} b + \cdots + a_{km+i-j} b^{k-1}) x^{i-j}
\end{aligned}$$

Cuando $(x^m - b)$ es factor de $P(x)$, entonces $R(x) = 0$, luego, cada uno de los polinomios en b (coeficientes de los x^j en $R(x)$) es cero, por lo tanto, si existe algún número racional b' que es cero de cada uno de los polinomios en b , dicho número es tal que $(x^m - b')$ es factor de $P(x)$.

Completa la demostración el hecho de que con las expresiones anteriores se tiene que:

$$(x^m - b) C(x) + R(x) = P(x)$$

Falta probar que efectivamente

$$[C(x)](x^m - b) + R(x) = P(x) \quad \text{o que}$$

$$C(x) x^m - b \cdot C(x) + R(x) = P(x)$$

$$\begin{aligned}
 C(x) x^m &= \sum_{j=0}^{m-1} a_{mk+i-j} x^{km+i-j} + \\
 &\sum_{j=0}^{m-1} (a_{(k-1)m+i-j} + a_{km+i-j} b) x^{(k-1)m+i-j} + \\
 &\sum_{j=0}^{m-1} (a_{(k-2)m+i-j} + a_{(k-1)m+i-j} b + a_{km+i-j} b^2) x^{(k-2)m+i-j} \\
 &\quad + \dots + \\
 &\sum_{j=0}^{m-1} (a_{2m+i-j} + a_{3m+i-j} b + \dots + a_{km+i-j} b^{k-2}) x^{2m+i-j} + \\
 &\sum_{j=0}^{m-1} (a_{m+i-j} + a_{2m+i-j} b + \dots + a_{km+i-j} b^{k-1}) x^{m+i-j} \\
 &- b C(x) = - \sum_{j=0}^{m-1} a_{mk+i-j} b x^{(k-1)m+i-j} \\
 &- \sum_{j=0}^{m-1} (a_{(k-1)m+i-j} b + a_{km+i-j} b^2) x^{(k-2)m+i-j} \\
 &- \sum_{j=0}^{m-1} (a_{(k-2)m+i-j} b + a_{(k-1)m+i-j} b^2 + a_{km+i-j} b^3) \cdot \\
 &\quad \cdot x^{(k-3)m+i-j} - \dots \\
 &- \sum_{j=0}^{m-1} (a_{2m+i-j} b + a_{3m+i-j} b^2 + \dots + a_{km+i-j} b^{k-1}) x^{m+i-j} \\
 &- \sum_{j=0}^{m-1} (a_{m+i-j} b + a_{2m+i-j} b^2 + \dots + a_{km+i-j} b^k) x^{i-j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(x) x^m - b C(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} a_{km+i-j} x^{km+i-j} + \\
&\sum_{j=0}^{m-1} a_{(k-1)m+i-j} x^{(k-1)m+i-j} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{(k-2)m+i-j} x^{(k-2)m+i-j} \\
&\quad + \cdots + \sum_{j=0}^{m-1} a_{2m+i-j} x^{2m+i-j} + \sum_{j=0}^{m-1} a_{m+i-j} x^{m+i-j} \\
&- \sum_{j=0}^{m-1} (a_{2m+i-j} b + a_{3m+i-j} b^2 + \cdots + a_{km+i-j} b^{k-1}) x^{m+i-j} \\
&- \sum_{j=0}^{m-1} (a_{m+i-j} b + a_{2m+i-j} b^2 + \cdots + a_{km+i-j} b^k) x^{i-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(x) &= \sum_{j=0}^i (a_j + a_{m+j} b + \cdots + a_{km+j} b^k) x^j \\
&+ \sum_{j=i+1}^{m-1} (a_j + a_{m+j} b + \cdots + a_{(k-1)m+j} b^{k-1}) x^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(x) &= (a_0 + a_m b + \cdots + a_{km} b^k) \\
&+ (a_1 + a_{m+1} b + \cdots + a_{km+1} b^k) x + \cdots \\
&\cdots + (a_i + a_{m+i} b + \cdots + a_{km+i} b^k) x^i \\
&+ (a_{i+1} + a_{m+i+1} b + \cdots + a_{(k-1)m+i+1} b^{k-1}) x^{i+1} + \cdots \\
&\cdots + (a_{m-2} + a_{2m-2} b + \cdots + a_{km-2} b^{k-1}) x^{m-2} \\
&+ (a_{m-1} + a_{2m-1} b + \cdots + a_{km-1} b^{k-1}) x^{m-1}
\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
 [C(x)] (x^m - b) = & \\
 & \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{km+i-j} x^{km+i-j} + a_{(k-1)m+i-j} x^{(k-1)m+i-j} + \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots + a_{2m+i-j} x^{2m+i-j} \right) + \sum_{j=0}^i a_{m+i-j} x^{m+i-j} \\
 & - (a_{m+i} b + a_{2m+i} b^2 + \dots + a_{km+i} b^{k-1}) x^i \\
 & - (a_{m+i-1} b + a_{2m+i-1} b^2 + \dots + a_{km+i-1} b^k) x^{i-1} - \dots \\
 & \quad \dots - (a_{m+1} b + a_{2m+1} b^2 + \dots + a_{km+1} b^k) x \\
 & - (a_m b + a_{2m} b^2 + \dots + a_{km} b^k) \\
 & - (a_{2m-1} b + a_{3m-1} b^2 + \dots + a_{km-1} b^{k-1}) x^{m-1} \\
 & - (a_{2m-2} b + a_{3m-2} b^2 + \dots + a_{km-2} b^{k-1}) x^{m-2} - \dots \\
 & - (a_{m+i+2} b + a_{2m+i+2} b^2 + \dots + a_{(k-1)m+i+2} b^{k-1}) x^{i+2} \\
 & - (a_{m+i+1} b + a_{2m+i+1} b^2 + \dots + a_{(k-1)m+i+1} b^{k-1}) x^{i+1}
 \end{aligned}$$

Haciendo :

$$\begin{aligned}
 R(x) + [C(x)] (x^m - b) = & \\
 & \sum_{j=0}^{m-1} \left(a_{km+i-j} x^{km+i-j} + a_{(k-1)m+i-j} x^{(k-1)m+i-j} + \right. \\
 & \quad \left. \dots + a_{2m+i-j} x^{2m+i-j} \right) + \sum_{j=0}^i a_{m+i-j} x^{m+i-j} + \\
 & a_0 + a_1 x + \dots + a_i x^i + a_{i+1} x^{i+1} + a_{i+2} x^{i+2} \\
 & + \dots + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-1} x^{m-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{km+i} x^{km+i} + a_{km+i-1} x^{km+i-1} + \dots \\
&\quad \dots + a_{(k-1)m+i-1} x^{(k-1)m+i-1} + a_{(k-1)m+i} x^{(k-1)m+i} + \dots \\
&\quad \dots + a_{(k-2)m+i+1} x^{(k-2)m+i+1} + \dots + a_{2m+i} x^{2m+i} \\
&\quad + a_{2m+i-1} x^{2m+i-1} + \dots + a_{m+i+1} x^{m+i+1} + a_{m+i} x^{m+i} \\
&\quad + a_{2m+i-1} x^{2m+i-1} + \dots + a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \\
&\quad + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0
\end{aligned}$$

Como $km + i = n$:

$$R(x) + [C(x)](x^m - b) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = P(x)$$

COROLARIO I

Un polinomio como el descrito en el enunciado del teorema, admite posibles factores de la forma $(x^{m+t} - b)$, con:

1. $2 \leq m \leq \frac{(n+1)}{2}$, y $t = 0$, si n es impar y el polinomio es completo.
2. $1 \leq m \leq \frac{(n+1)}{2}$, y, $1 \leq t \leq \frac{(n-1)}{2}$, si n es impar y el polinomio es incompleto pero su incompletez consiste en:

$$a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t} = 0 = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t+1} = \dots = a_{\frac{(n+1)}{2}} = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+1} = \dots = a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t-1}, \text{ y,}$$

Si algún $a_i = 0$, con $1 \leq i \leq \{\frac{(n+1)}{2}\} - t - 1$, entonces también $a_{i+\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} = 0$ y viceversa.

3. $2 \leq m \leq \frac{n}{2}$, y, $t = 0$, si n es par y el polinomio es completo.
4. $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$, y, $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$, si el polinomio es incompleto pero su incompletez consiste en $a_{\frac{n}{2}-t+1} = 0 = a_{\frac{n}{2}-t+2} = \dots = a_{\frac{n}{2}-1} = a_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}+1} = \dots = a_{\frac{n}{2}+t-1}$, y, si algún $a_i = 0$, con $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - t$, entonces también $a_{i+\frac{n}{2}+t} = 0$, y viceversa.

Prueba

Si n es impar, el polinomio tiene máximo $n + 1$ términos, supongamos que $x^{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} - b$, con $1 \leq t \leq \frac{(n-1)}{2}$, $t \in \mathbb{Z}$, es un posible factor de $P(x)$, las $\left\{\frac{(n+1)}{2}\right\} + t$ ecuaciones polinómicas en b que resultan de aplicar el teorema son.

$$\begin{aligned}
 P_1(b) &= a_0 + a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} b = 0 \\
 P_2(b) &= a_1 + a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t+1} b = 0 \\
 &\vdots \\
 P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t}(b) &= a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t-1} + a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t-1+\{\frac{(n+1)}{2}\}+t} b = \\
 &= a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t-1} + a_n b = 0 \\
 P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t+1}(b) &= a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-t} = 0 \\
 &\vdots \\
 P_{\frac{(n+1)}{2}}(b) &= a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}-1} = 0 \\
 P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+1}(b) &= a_{\frac{(n+1)}{2}} = 0 \\
 P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+2}(b) &= a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+1} = 0 \\
 &\vdots \\
 P_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t}(b) &= a_{\{\frac{(n+1)}{2}\}+t-1} = 0
 \end{aligned}$$

Para que el sistema de ecuaciones pueda tener una solución común b , es necesario que todos los coeficientes que constituyen las ecuaciones monómicas sean ceros y que si algún coeficiente de las ecuaciones binómicas es cero, entonces el otro coeficiente de la misma ecuación también es cero obteniéndose así identidades de la forma $0 = 0$ que admiten las soluciones de las demás ecuaciones, con esto quedan probados los numerales 1) y 2) del enunciado del corolario.

Si n es par, el polinomio tiene como máximo $n + 1$ términos, supongamos que

$x^{(\frac{n}{2})+t} - b$, con $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$, $t \in \mathbb{Z}$, es un posible factor de $P(x)$, las $(\frac{n}{2}) + t$ ecuaciones que resultan de aplicar el teorema son:

$$\begin{aligned}
 P_1(b) &= a_0 + a_{(\frac{n}{2})+t} b = 0 \\
 P_2(b) &= a_1 + a_{(\frac{n}{2})+t-1} b = 0 \\
 &\vdots \\
 P_{(\frac{n}{2})-t+1}(b) &= a_{(\frac{n}{2})-t} + a_{(\frac{n}{2})-t+(\frac{n}{2})+t} b = a_{(\frac{n}{2})-t} + a_n b = 0 \\
 P_{(\frac{n}{2})-t+2}(b) &= a_{(\frac{n}{2})-t+1} = 0 \\
 P_{(\frac{n}{2})-t+3}(b) &= a_{(\frac{n}{2})-t+2} = 0 \\
 &\vdots \\
 P_{(\frac{n}{2})}(b) &= a_{(\frac{n}{2})-1} = 0 \\
 P_{(\frac{n}{2})+1}(b) &= a_{(\frac{n}{2})} = 0 \\
 P_{(\frac{n}{2})+2}(b) &= a_{(\frac{n}{2})+1} = 0 \\
 &\vdots \\
 P_{(\frac{n}{2})+t-1}(b) &= a_{(\frac{n}{2})+t-2} = 0 \\
 P_{(\frac{n}{2})+t}(b) &= a_{(\frac{n}{2})+t-1} = 0
 \end{aligned}$$

Las mismas consideraciones que se hicieron anteriormente prueban lo enunciado en los numerales 3) y 4) del corolario.

NOTA

A partir del criterio de las derivadas del polinomio $P(x)$, a saber: si $P(c) = 0$, $P'(c) = 0$, $P''(c) = 0$, \dots , $P^{(r-1)}(c) = 0$ y $P^{(r)}(c) \neq 0$, entonces $P(x)$ admite el factor $(x-c)^r$, al hallar un factor de la forma $(x^m - b)$, hemos hallado m factores lineales de la forma $x - b_i$, con $1 \leq i \leq m$, los cuales son las m raíces m -ésimas de b , por lo tanto acá es válido el mismo y se aplicaría como se aplica el teorema, es decir, se plantean las m ecuaciones polinómicas en b y se encuentra el número b que las satisfaga, luego se deriva $P(x)$ y se

plantean las m ecuaciones polinómicas en b para probar que b es raíz de todas, y se continúa aplicando este procedimiento hasta probar que b satisface las m ecuaciones polinómicas planteadas a partir de $P^{(r-1)}(x)$, pero no a las de $P^{(r)}(x)$, este procedimiento se vuelve algo engorroso y se puede cambiar por probar que b satisface las derivadas hasta de orden $r - 1$ y no satisface la de orden r de las m ecuaciones polinómicas en b planteadas a partir de $P(x)$ sin necesidad de estar derivando sucesivamente $P(x)$ y posteriormente planteando las m ecuaciones en b y evaluando, este procedimiento se valida a partir del siguiente corolario.

COROLARIO II

$$1. \text{ Si } P(b) = \sum_{p=0}^k a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (1)$$

$$\text{y } P'(b) = \sum_{p=0}^k (pm + j) a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i - 1 \quad (2)$$

$$\text{entonces } P(b') = \sum_{p=1}^k p a_{pm+j} b^{p-1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (3)$$

Prueba

Derivando (1) con respecto a b se obtiene

$$P(b') = \sum_{p=1}^k p a_{pm+j} b^{p-1} = \sum_{p=0}^k p a_{pm+j} b^{p-1} = \left(\frac{1}{b}\right) \sum_{p=0}^k p a_{pm+j} b^p \quad (4)$$

De (2) se tiene

$$P'(b) = m \sum_{p=0}^k p a_{pm+j} b^p + j \sum_{p=0}^k a_{pm+j} b^p = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i - 1 \quad (5)$$

De (1)

$$j \sum_{p=0}^k a_{pm+j} b^p = 0 \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5) resulta

$$\sum_{p=0}^k pa_{pm+j}b^p = 0, \quad (7)$$

y sustituyendo (7) en (4) resulta

$$\sum_{p=1}^k pa_{pm+j}b^{p-1} = 0$$

$$2. \text{ Si } P(b) = \sum_{p=0}^{k-1} a_{pm+j}b^p = 0, \quad j = i+1, i+2, \dots, m-1 \quad (8)$$

$$\text{y } P'(b) = \sum_{p=0}^{k-1} (pm+j)a_{pm+j}b^p = 0, \quad j = i, i+1, \dots, m-2, \quad (9)$$

entonces

$$P(b') = \sum_{p=1}^{k-1} pa_{pm+j}b^{p-1} = 0 \quad (10)$$

La prueba de (10) a partir de (8) y (9), se efectúa en forma análoga a como se hizo para (3)

OBSERVACIÓN

Otro método para hallar las ecuaciones polinómicas en b consiste en aplicar la división sintética con una constante b por determinar, ordenando los coeficientes de $P(x)$ en forma descendiente y tomando cada segundo coeficiente si $m = 2$, cada tercer coeficiente si $m = 3$, etc., las ecuaciones polinómicas buscadas serán los residuos o últimas expresiones igualadas a cero, como se muestra a continuación para la siguiente ecuación:

$$P(x) = x^9 - x^8 + 2x^7 - 5x^6 - x^5 - 8x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 6x - 12 = 0$$

Buscamos factores de la forma $(x^4 - b)$, aplicamos la división sintética cada cuarto coeficiente

1	-1	2	-5	-1	-8	4	-10	-6	-12	b
				b				$b^2 - b$		
1				$b - 1$				$b^2 - b - 6$		
					-b				$-b^2 - 8b$	
	-1				$-b - 8$				$-b^2 - 8b - 12$	
						$2b$				
		2				$2b + 4$				
								-5b		
			-5					$-5b - 10$		

Las ecuaciones polinómicas en b buscadas son respectivamente

$$b^2 - b - 6 = 0$$

$$-b^2 - 8b - 12 = 0$$

$$2b + 4 = 0$$

$$-5b - 10 = 0$$

Obsérvese que son las ecuaciones obtenidas al aplicar el teorema.

CONCLUSIONES

El grado de dificultad para hallar factores de la forma $(x^m - b)$ disminuye a medida que aumenta m puesto que las ecuaciones en b resultantes para resolver tienen cada vez menos términos.

El teorema se puede considerar como una extensión a grado m del ya existente que permite hallar los factores de la forma $(x - b)$ con b racional, además aplica éste en la solución de los polinomios en b .